15/10/17

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0$$
$$6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$
$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$$

με LU ανάλυση του πίνακα A.

(Λύση)

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \underline{9} & 6 & 3 \\
\frac{2}{3} & 6 & 8 & 4 \\
\frac{1}{3} & 3 & 4 & 3 \\
 & & \underline{4} & 2 \\
\frac{1}{2} & & 2 & 2 \\
 & & & \underline{1}
\end{array}
\qquad
L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{3} & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

(1)

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\rightsquigarrow y_1 = 0 \\
\rightsquigarrow y_2 = 6 - \frac{2}{3}y_1 = 6 \\
\rightsquigarrow y_3 = 2 - \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = 2 - 0 - 3 = -1
\end{array}$$

$$y^T = [0, 6, -1]$$

U

$$\begin{array}{cccc} 9 & 6 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 & 6 \\ & & 1 & -1 \end{array}$$

$$x^T = [-1 \quad 2 \quad -1]$$

Ευρεση οριζουσας του A.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$$
$$= 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$$\det(A) = \det(A^{(1)}) = \det(A^{(2)}) = \dots = \det(A^{(n)}) = \det(U)$$
$$\det(A) = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 36.$$

Ευρεση αντιστροφου με απαλοιφη Gauss
η LU αναλυση

$\boxed{AX = I}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & 9 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 6 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ & & \underline{4} & 2 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ & & 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

$$AX = I \iff LUX = I \iff \begin{cases} LY = I. \\ UX = Y. \end{cases}$$

(L)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(U)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 4 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

$A = LU$

$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

$LY = I \rightarrow Y = L^{-1}$

$UX = I \rightarrow X = U^{-1}$

$A^{-1} = XY.$

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss:

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

με υπολογιστή με σύνολο αριθμών μηχανής $F(10, 3, -20, 20)$

$$x_1 = \frac{10000}{9999} = 1.\overline{0001}, \quad x_2 = \frac{9998}{9999} = 0,\overline{9998}$$

$$m_{21} = fl\left(a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)}\right) = fl(1/10^{-4}) = fl(10^4) = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = fl\left(a_{22}^{(1)} - m_{21}a_{12}^{(1)}\right) = fl(1 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9999) = 10^{-4}$$

$$b_2^{(2)} = fl\left(b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}\right) = fl(2 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9998) = -10^4$$

μακριά από την πραγματική λύση.

Μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση:
Πριν την πρώτη απαλοιφή αλλάζουμε την 1η γραμμή με την k γραμμή, όπου $|a_{k1}| = \max|a_{j1}|$.
Προκύπτουν πολλαπλασιαστές ≤ 1.
Το ίδιο γίνεται σε κάθε επόμενο βήμα στον υποπίνακα.

Π.Χ

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

με απλ. απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση.

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^T = [1 \;\; -1 \;\; 1]$$

$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	2	-1	1	4
	4	1	1	4
$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
			1	1

$x^T = [1 \;\; -1 \;\; 1]$